

### 13. Funkcja wykładnicza.

Zadania:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1.</b> Proces stygnięcia naparu z ziół w otoczeniu o stałej temperaturze $22^{\circ}\text{C}$ opisuje funkcja wykładnicza $T(x) = 78 \cdot 2^{-0,05x} + 22$ , gdzie $T(x)$ to temperatura naparu wyrażona w stopniach Celsjusza po $x$ minutach liczonych od momentu $x = 0$ , w którym zioła zalano wrzątkiem. Wyznacz temperaturę naparu po 20 minutach od momentu zalania ziół wrzątkiem.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>2.</b> Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = 4^{-x} + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$ . Oblicz $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>3.</b> Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x$ . Oblicz jaką wartość przyjmuje funkcja $f$ dla argumentu $x = -3$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>4.</b> Dane są funkcje $f(x) = 3^x$ oraz $g(x) = f(-x)$ , określone dla wszystkich liczb rzeczywistych $x$ . Wyznacz punkt wspólny wykresów funkcji $f$ i $g$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <b>5.</b> Dane są dwie funkcje określone dla wszystkich liczb rzeczywistych $x$ wzorami $f(x) = -5x + 1$ oraz $g(x) = 5^x$ . Wyznacz punkty wspólne wykresów tych funkcji.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>6.</b> Sprawdź czy punkt należy do wykresu funkcji $f(x) = -2^{x-2}$<br>a) $A = (2, -1)$<br>b) $B = (1, -2)$<br>c) $C = \left(1, \frac{1}{2}\right)$<br>d) $D = (4, 4)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>7.</b> Funkcja wykładnicza określona wzorem jest $f(x) = 3^x$ . Oblicz dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 6.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>8.</b> Masa $m$ leku $L$ zażytego przez chorego zmienia się w organizmie zgodnie z zależnością wykładniczą $m(t) = m_0 \cdot (0,6)^{0,25t}$<br>gdzie:<br>$m_0$ – masa (wyrażona w mg) przyjętej w chwili $t = 0$ dawki leku,<br>$t$ – czas (wyrażony w godzinach) liczony od momentu $t = 0$ zażycia leku.<br>Chory przyjął jednorazowo lek $L$ w dawce 200mg. Oblicz, ile mg leku $L$ pozostanie w organizmie chorego po 12 godzinach od momentu przyjęcia dawki.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>9.</b> Czas $T$ półtrwania leku w organizmie to czas, po którym masa leku w organizmie zmniejsza się o połowę – po przyjęciu jednorazowej dawki. Przyjmij, że po przyjęciu jednej dawki masa $m$ leku w organizmie zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą<br>$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$<br>gdzie:<br>$m_0$ – masa przyjętej dawki leku<br>$T$ – czas półtrwania leku<br>$t$ – czas liczony od momentu przyjęcia dawki.<br>W przypadku przyjęcia kilku(nastu) dawek powyższa zależność pozwala obliczyć, ile leku pozostało w danym momencie w organizmie z każdej poprzednio przyjętej dawki. W ten sposób obliczone masy leku z przyjętych poprzednich dawek sumują się i dają informację o całkowitej aktualnej masie leku w organizmie.<br>Pacjent otrzymuje co 4 dni o tej samej godzinie dawkę $m_0 = 100\text{mg}$ leku $L$ . Czas półtrwania tego leku w organizmie jest równy $T = 4$ doby.<br>Oblicz masę leku $L$ w organizmie tego pacjenta tuż przed przyjęciem jedenastej dawki tego leku. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1mg. Zapisz obliczenia. |
| <b>10.</b> Do wykresu funkcji wykładniczej, określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x$ wzorem $f(x) = a^x$ (gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$ ), należy punkt $P = (2, 9)$ . Oblicz $a$ i zapisz zbiór wartości funkcji $g$ , określonej wzorem $g(x) = f(x) - 2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>11.</b> Czas połowicznego rozpadu pierwiastka to okres, jaki jest potrzebny, by ze 100% pierwiastka pozostało 50% tego pierwiastka. Oznacza to, że ilość pierwiastka pozostała z każdego grama pierwiastka po $x$ okresach rozpadu połowicznego wyraża się wzorem $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . W przypadku izotopu jodu $^{131}\text{I}$ czas połowicznego rozpadu jest równy 8 dni. Wyznacz najmniejszą liczbę dni, po upływie których pozostanie z 1 g $^{131}\text{I}$ nie więcej niż 0,125 g tego pierwiastka.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

- 12.** Czas  $T$  połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas, po którym liczba jąder danego izotopu (a zatem i masa tego izotopu) zmniejsza się o połowę – tzn. połowa jąder danego izotopu przemienia się w inne jądra. Liczba jąder  $N(t)$  izotopu promieniotwórczego pozostających w próbce po czasie  $t$ , licząc od chwili  $t_0 = 0$ , wyraża się zależnością wykładniczą:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie  $N_0$  jest liczbą jąder izotopu promieniotwórczego w chwili początkowej  $t_0 = 0$ .

Czas połowicznego rozpadu węgla  $^{14}\text{C}$  to około 5700 lat. Naukowcy oszacowali za pomocą datowania radiowęglowego, że masa izotopu węgla  $^{14}\text{C}$  w pewnym organicznym znalezisku archeologicznym stanowi  $\frac{1}{16}$  masy tego izotopu, jaka utrzymywała się podczas życia organizmu.

Oblicz, ile lat ma opisane znalezisko archeologiczne. Wynik podaj z dokładnością do stu lat.

- 13.** Punkty  $A$  i  $B$  należą do wykresu funkcji  $f(x)$ . Wyznacz  $p$  i  $q$

a)  $A = (-3, p), B = \left(q, \frac{1}{16}\right), f(x) = 2^x$

b)  $A = (p, 16), B = (3, q), f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

- 14.** Rozwiąż równanie

a)  $2^x = 512$

b)  $4^{x+1} = 256$

c)  $3 \cdot 5^x = 375$

d)  $6 \cdot 6^x = 216$

- 15.** Do wykresu funkcji wykładniczej, określonej dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  wzorem  $f(x) = a^x$  (gdzie  $a > 0$  i  $a \neq 1$ ), należy punkt  $P = \left(2, \frac{1}{16}\right)$ . Określ monotoniczność funkcji i sprawdź czy punkt  $Q = (-3, 64)$  należy do wykresu funkcji  $f(x)$ .

- 16.** Sprawdź czy liczba jest wymierna

$$\left( \left( (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2(1 + 2\sqrt{2})(1 - 2\sqrt{2}) + (1 - 2\sqrt{2})^2 \right)^{\sqrt{2}-1} \right)$$

- 17.** Liczba  $9^{\sqrt{27}} : 27^{2\sqrt{3}+1}$  jest pierwiastkiem równania  $3x^3 - x^2 + ax + 4 = 0$ . Oblicz wartość  $a$ .

- 18.** Uporządkuj liczby  $a, b, c, d$  rosnąco

$$a = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2,1}, b = 0,6^{3,2}, c = \left(\frac{9}{25}\right)^{\sqrt{2}}, d = 0,36^{2,4}$$