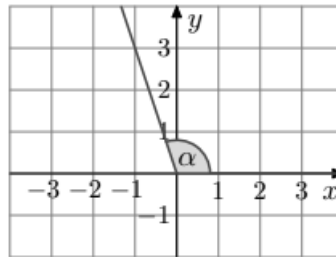


15. Trygonometria.

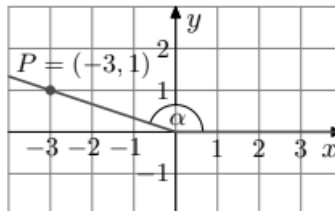
Zadania:

1. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono kąt o mierze α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = -3$ oraz $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (zobacz rysunek).



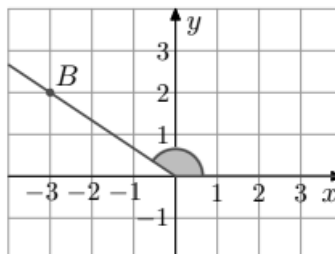
- a) wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$
b) oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

2. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono kąt α o wierzchołku w punkcie $O = (0, 0)$. Jedno z ramion tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią OX , a drugie przechodzi przez punkt $P = (-3, 1)$ (zobacz rysunek).



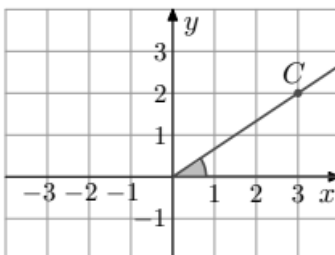
- a) wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$
b) oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

3. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono kąt α o wierzchołku w punkcie $O = (0, 0)$. Jedno z ramion tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią OX , a drugie przechodzi przez punkt $B = (-3, 2)$ (zobacz rysunek).



- a) wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$
b) oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

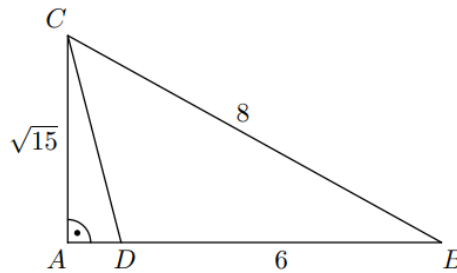
4. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono kąt α o wierzchołku w punkcie $O = (0, 0)$. Jedno z ramion tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią OX , a drugie przechodzi przez punkt $C = (-1, 3)$ (zobacz rysunek).



- a) wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$
b) oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

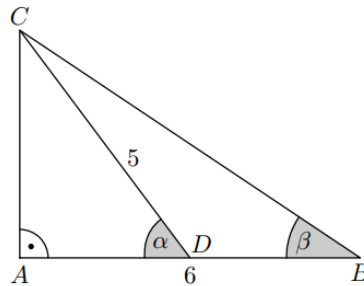
5. W trójkącie prostokątnym ABC sinus kąta CAB jest równy $\frac{3}{5}$, a przeciwprostokątna AB jest o 8 dłuższa od przyprostokątnej BC . Oblicz długość przeciwprostokątnej AB tego trójkąta.

6. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $|AC| = \sqrt{15}$ i $|BC| = 8$. Na przyprostokątnej AB leży taki punkt D , że $|BD| = 6$



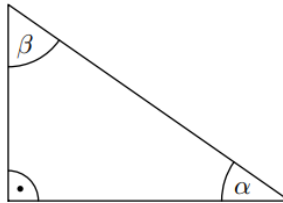
Wyznacz sinus kąta ABC oraz tangens kąta ADC .

7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym bok BC jest przeciwprostokątną, przyprostokątna AB ma długość 6, a środkowa CD ma długość 5. Oznaczmy kąt ADC przez α , natomiast kąt ABC – przez β (zobacz rysunek).



Oblicz $\tan \alpha$ oraz $\sin \beta$.

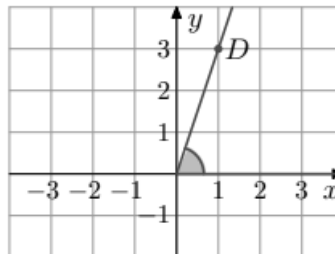
8. Dany jest trójkąt prostokątny o kątach ostrych α oraz β (zobacz rysunek). Sinus kąta α jest równy $\frac{4}{7}$.



Oblicz $\cos \alpha$ oraz $\cos \beta$

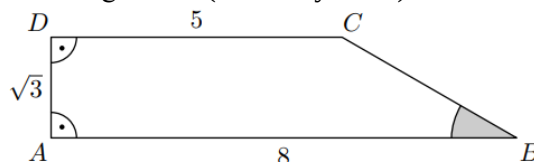
9. Dany jest trójkąt prostokątny o takim kącie α , że $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość 8. Oblicz długość krótszej przyprostokątnej tego trójkąta.

10. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono kąt α o wierzchołku w punkcie $O = (0, 0)$. Jedno z ramion tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią OX , a drugie przechodzi przez punkt $D = (-1, 3)$ (zobacz rysunek).



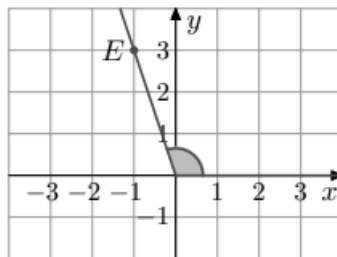
- wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$
- oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

11. Podstawy trapezu prostokątnego $ABCD$ mają długości: $|AB| = 8$ oraz $|CD| = 5$. Wysokość AD tego trapezu ma długość $\sqrt{3}$ (zobacz rysunek).



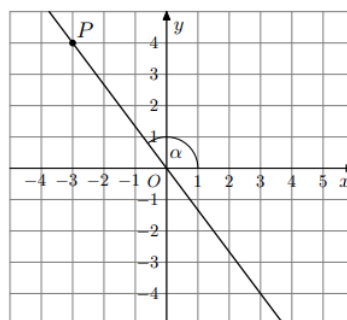
Oblicz miarę kąta ostrego ABC .

12. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono kąt α o wierzchołku w punkcie $O = (0, 0)$. Jedno z ramion tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią OX , a drugie przechodzi przez punkt $E = (-1, 3)$ (zobacz rysunek).



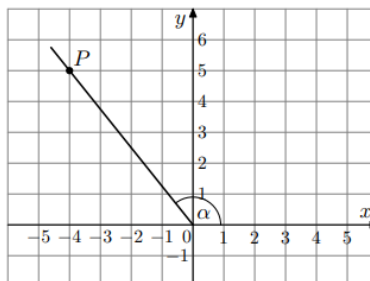
- a) wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$
b) oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

13. Punkty $P = (-3, 4)$ i $O = (0, 0)$ leżą na jednej prostej. Kąt α jest kątem nachylenia tej prostej do osi OX (zobacz rysunek)



- a) wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$
b) oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

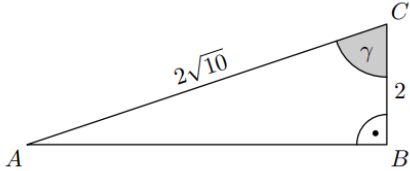
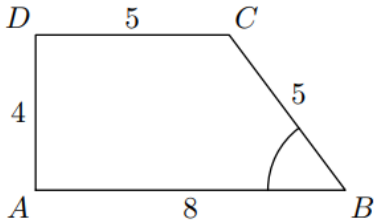
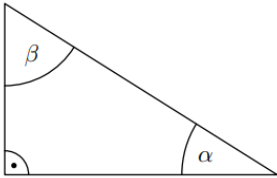
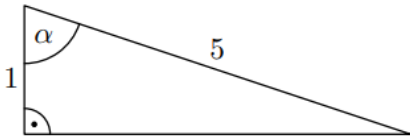
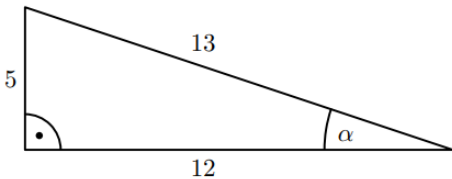
14. Punkty $P = (-4, 5)$ i $O = (0, 0)$ leżą na jednej prostej. Kąt α jest kątem nachylenia tej prostej do osi OX (zobacz rysunek)

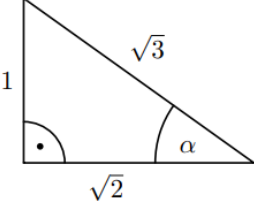
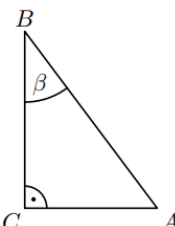


- a) wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$
b) oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

15. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym bok BC jest przeciwprostokątną oraz $|AC| = 6$. Tangens kąta BCA jest równy $\frac{3}{2}$. Oblicz długość odcinka AB .

16. Oblicz
- $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$
 - $(\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ)^2 - \sin 60^\circ$
 - $\sin 120^\circ - \cos 30^\circ$
 - $\frac{\sin^3 25^\circ + \sin 25^\circ \cdot \cos^2 25^\circ}{\cos 25^\circ}$
 - $\cos 12^\circ \cdot \sin 78^\circ + \sin 12^\circ \cdot \cos 78^\circ$
 - $2 \sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ + \cos^2 18^\circ$
 - $\frac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ + 1}$
 - $(\cos 30^\circ - \sin 45^\circ)^2 + \cos 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$
 - $\sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{2}$
 - $4 \cos^2 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$
 - $\frac{\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ}{2 \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ}$

17.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$.
18.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\cos^2 \alpha - 2$.
19.	W trójkącie prostokątnym dane są kąty ostre: $\alpha = 27^\circ$ i $\beta = 63^\circ$. Oblicz $\frac{\cos \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha}$.
20.	Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = \cos 47^\circ$. Oblicz miarę kąta α .
21.	Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym bok AC jest przeciwprostokątną oraz $ BC = 2$ i $ AC = 2\sqrt{10}$. Oznaczmy kąt BCA przez γ (zobacz rysunek).
 Wyznacz $\sin \gamma$.	
22.	Przyprostokątna AC trójkąta prostokątnego ABC ma długość 6, a przeciwprostokątna AB ma długość $3\sqrt{5}$. Oblicz tangens kąta ostrego CAB tego trójkąta.
23.	Dane są punkty $M = (6,0)$, $N = (6,8)$ oraz $O = (0,0)$. Oblicz tangens kąta ostrego MON .
24.	W trapezie prostokątnym $ABCD$ są dane długości boków: $ AB = 8$, $ BC = 5$, $ DC = 5$, $ AD = 4$ (zobacz rysunek).
 Oblicz tangens kąta ostrego ABC w tym trapezie.	
25.	Dany jest trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β (zobacz rysunek).
 Oblicz ile jest równe wyrażenie $2 \cos \alpha - \sin \beta$.	
26.	Dany jest trójkąt prostokątny o długościach przyprostokątnych 2 i 5. Oblicz cosinus większego z kątów ostrych w tym trójkącie.
27.	Na płaszczyźnie dane są punkty: $A = (\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $B = (0,0)$ i $C = (\sqrt{2}, 0)$. Oblicz miarę kąta BAC .
28.	Oblicz sinus kąta ostrego α dla trójkąta przedstawionego na rysunku poniżej
	
29.	Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mają długości 1 oraz $\sqrt{3}$. Oblicz miarę najmniejszego kąta w tym trójkącie.
30.	Na rysunku zaznaczono długości boków i kąt α trójkąta prostokątnego (zobacz rysunek).
 Wyznacz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$.	

31.	Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.
32.	Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{3}{7}$. Oblicz $\sin \alpha$.
33.	Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz $\sin \alpha$.
34.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $2 - \cos^2 \alpha$.
35.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{8}{9}$. Oblicz $\cos \alpha$.
36.	Dany jest trójkąt prostokątny (patrz rysunek).  Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$.
37.	Kąt o mierze α jest rozwarty oraz $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Oblicz cosinus kąta o mierze α .
38.	Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{4 \cos \alpha} = 6$ Wyznacz tangens kąta α.
39.	Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. Wyznacz tangens kąta α .
40.	Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha$ Wyznacz $\cos \alpha$.
41.	Dane są długości boków $BC = 5$ i $AC = 3$ trójkąta prostokątnego ABC o kącie ostrym β (zobacz rysunek).  Wyznacz $\sin \beta$.
42.	Kąt o mierze α jest rozwarty oraz $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Oblicz cosinus kąta o mierze α .
43.	Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = \frac{24}{25}$. Oblicz tangens kąta α .
44.	Uprość równanie: $1 + \cos^2 27^\circ$ $\sin^3 20^\circ + \cos^2 20^\circ \cdot \sin 20^\circ$ $\cos \alpha - \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ $(1 - \cos 20^\circ) \cdot (1 + \cos 20^\circ) - \sin^2 \alpha$ $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$ $3 \sin^3 \alpha \cos \alpha + 3 \sin \alpha \cos^3 \alpha$ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$ $2 \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
45.	Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Oblicz tangens kąta α .
46.	Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$. Oblicz sinus kąta α .
47.	Kąt α jest ostry i $4 \operatorname{tg} \alpha = 3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$. Oblicz tangens kąta α .
48.	Kąt α jest ostry i $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{16}{9}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

49.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz $\cos^2(90^\circ - \alpha)$.
50.	Kąt o mierze α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$. Oblicz $\cos^2 \alpha$.
51.	Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Oblicz $\cos \alpha$.
52.	Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Oblicz $\cos \alpha$.
53.	Cosinus kąta ostrego α jest równy $\frac{12}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$.
54.	Kąt $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ oraz wiadomo, że $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{3}{8}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2$.
55.	Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{4}{5}$. Oblicz $\cos \alpha$.
56.	Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Oblicz $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$.
57.	Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$. Oblicz $\cos \alpha$.
58.	Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$. Oblicz $\sin \alpha$.
59.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha - \cos \alpha$.
60.	Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz $\sin \alpha$.
61.	Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{3}{4}$. Oblicz $\cos \alpha$.
62.	Jeżeli $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha$. Oblicz $\cos \alpha$.
63.	Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $3 \operatorname{tg} \alpha = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha + \cos \alpha$
64.	Miara kąta α spełnia warunek $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Uprość wartość wyrażenia $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$
65.	Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3 \cos \alpha - 2 \sin \alpha}{\sin \alpha - 5 \cos \alpha}$
66.	Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2 - \cos \alpha}{2 + \cos \alpha}$
67.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $2 \cos^2 \alpha - 1$.
68.	Dany jest kąt o mierze α taki, że $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ oraz $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Oblicz $\cos \alpha$ oraz $ \operatorname{tg} \alpha $.
69.	Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz $\sin \alpha$.
70.	Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $\cos \alpha$.
71.	Kąt o mierze α jest rozwarty oraz $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3 \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$.
72.	Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2 \alpha$.
73.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $2 \sin \alpha \cos \alpha$.
74.	Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\frac{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{\cos \alpha} = 4$. Oblicz tangens kąta α .
75.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.
76.	Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.
77.	Kąt α jest ostry i spełnia równość $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{7}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
78.	Kąt α jest ostry oraz $\frac{4}{\sin^2 \alpha} + \frac{4}{\cos^2 \alpha} = 25$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
79.	Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

80.	Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Oblicz $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.
81.	Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $2 + \sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.
82.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha$.
83.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.
84.	Kąt α jest ostry $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
85.	Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $\cos \alpha$.
86.	Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz $\sin \alpha + \cos \alpha$.
87.	Oblicz $a - b$, gdy $a = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, $b = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ dla $\alpha = 60^\circ$.
88.	Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha = 2$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{4 \cos \alpha - 3 \sin \alpha}{3 \cos \alpha + 5 \sin \alpha}$.
89.	W pewnym trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych jest równa $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Oblicz iloczyn sinusów tych kątów.
90.	W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α . Oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
91.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.
92.	Oblicz wartość wyrażenia: a) $\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos 120^\circ - \sin 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$ b) $\operatorname{tg}^2 30^\circ + \cos 150^\circ + \sin 120^\circ$ c) $(\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 150^\circ)^2$ d) $\sin 135^\circ \cdot \cos 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 135^\circ$
93.	Oblicz wartość pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli wiadomo, że: a) $\sin \alpha = \frac{11}{16}$, $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ b) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ c) $\operatorname{tg} \alpha = -1,05$, $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ d) $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$
94.	Kąt α jest ostry i $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $2 \sin \alpha \cos \alpha$.
95.	Oblicz sinus kąta ostrego α , jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg}^2 \alpha - 8 = 0$.
96.	Oblicz $3 - 2 \sin^2 \alpha$, jeśli wiadomo, że α jest kątem ostrym, a $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.