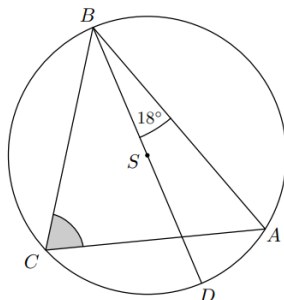


17.2. Planimetria (2). Okrąg i koło.

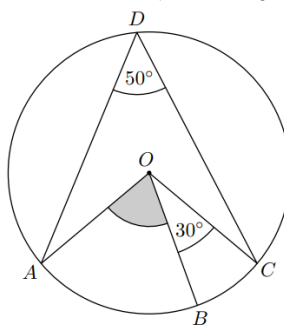
Zadania:

1. Punkty A, B, C oraz D leżą na okręgu o środku w punkcie S . Odcinek BD jest średnicą tego okręgu oraz $\angle ABD = 18^\circ$. Punkt D leży na krótszym łuku CA (zobacz rysunek).



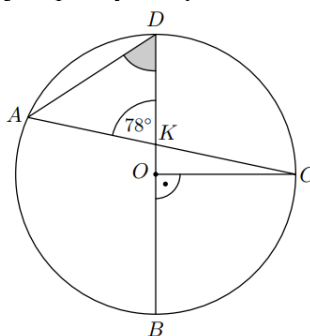
Znajdź miarę kąta BCA .

2. Punkty A, B, C oraz D leżą na okręgu o środku w punkcie O . Punkt B leży na krótszym łuku AC . Kąt CDA ma miarę 50° , a kąt COB ma miarę 30° (zobacz rysunek).



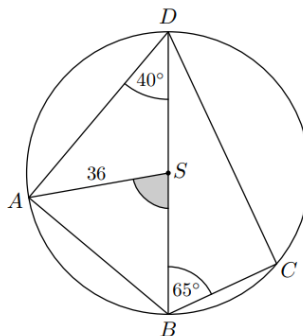
Znajdź miarę kąta BOA .

3. Punkty A, B, C oraz D leżą na okręgu o środku w punkcie O . Punkt K jest punktem przecięcia cięciwy AC i średnicy BD . Kąt COB jest prosty, a kąt AKD ma miarę 78° (zobacz rysunek).



Znajdź miarę kąta BDA .

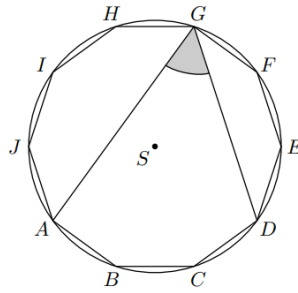
4. Punkty A, B, C oraz D leżą na okręgu o środku w punkcie S i o promieniu 36. Punkt S leży na odcinku BD . Kąt BDA ma miarę 40° , a kąt DBC ma miarę 65° (zobacz rysunek).



- Znajdź miarę kąta BSA .
- Oblicz długość łuku BC .

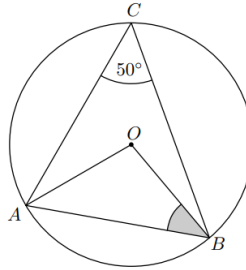
5. W okręgu O kąt środkowy β oraz kąt wpisany α są oparte na tym samym łuku. Kąt β ma miarę o 40° większą od kąta α . Wyznacz miarę kąta β .

6. Na dziesięciokącie foremnym $ABCDEFGHIJ$ opisano okrąg o środku w punkcie S (zobacz rysunek).



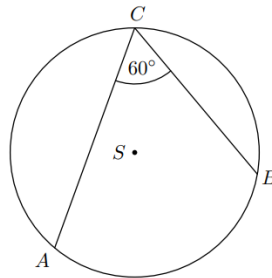
Znajdź miarę kąta AGD .

7. Punkty A, B oraz C leżą na okręgu o środku w punkcie O . Miara kąta BCA jest równa 50° (zobacz rysunek).



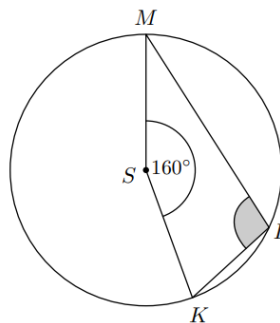
Znajdź miarę kąta ABO .

8. Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu 6. Miara kąta wpisanego ACB jest równa 60° (zobacz rysunek).



Znajdź długość łuku AB , na którym oparty jest kąt wpisany ACB .

9. Punkty K, L oraz M leżą na okręgu o środku w punkcie S . Miara kąta KSM jest równa 160° (zobacz rysunek).



Znajdź miarę kąta KLM .

10. Na trójkącie ostrokątnym ABC opisano okrąg o środku O . Miara kąta ABC jest równa 65° . Wyznacz miarę kąta ACO .

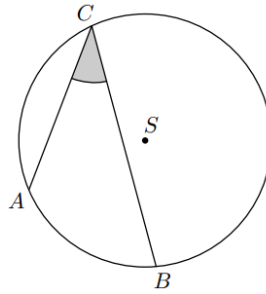
11. Miara kąta wpisanego w okrąg jest o 20° mniejsza od miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Wyznacz miarę kąta wpisanego.

12. Wyznacz miarę kąta środkowego opartego na łuku, którego długość jest równa $\frac{4}{9}$ długości okręgu.

13. Kąt środkowy i kąt wpisany są oparte na tym samym łuku. Suma ich miar jest równa 180° . Jaka jest miara kąta środkowego?

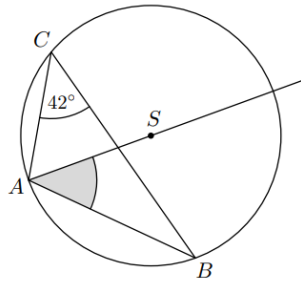
14. Koło ma promień równy 3. Oblicz obwód wycinka tego koła o kącie środkowym 30° .

- 15.** Punkty A, B oraz C leżą na okręgu o środku w punkcie S . Długość łuku AB , na którym jest oparty kąt wpisany ACB , jest równa $\frac{1}{5}$ długości okręgu (zobacz rysunek).



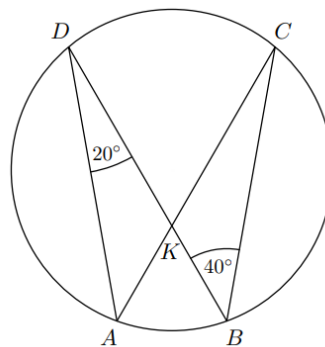
Znajdź miarę kąta ACB .

- 16.** W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku w punkcie S , kąt ACB ma miarę 42° (zobacz rysunek).



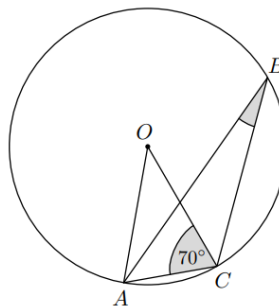
Znajdź miarę kąta ACB .

- 17.** Na łukach AB i CD okręgu są oparte kąty wpisane ADB i DBC , takie, że $|ADB| = 20^\circ$ i $|DBC| = 40^\circ$ (zobacz rysunek). Cięciwy AC i BD przecinają się w punkcie K .



Znajdź miarę kąta DKC .

- 18.** Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku w punkcie O . Kąt ACO ma miarę 70° (zobacz rysunek).



Znajdź miarę kąta ABC .

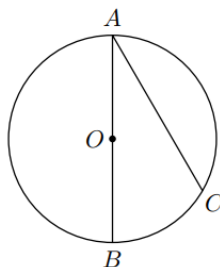
- 19.** W romb o boku $2\sqrt{3}$ i kącie 60° wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

- 20.** Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym jest równe $\frac{1}{3}\pi^3$. Oblicz długość boku tego trójkąta.

- 21.** Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest równy 8. Oblicz wysokość tego trójkąta.

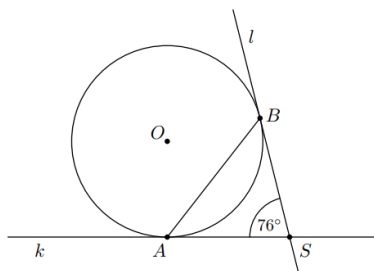
- 22.** Na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 12 i 9, opisano okrąg. Wyznacz promień tego okręgu.

- 23.** Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku w punkcie O i promieniu $r = 8$ (zobacz rysunek). Cięciwa AC ma długość $8\sqrt{3}$.



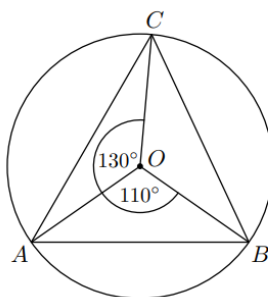
Znajdź miarę kąta BAC .

- 24.** Punkty A oraz B leżą na okręgu o środku O . Proste k i l są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – A i B . Te proste przecinają się w punkcie S i tworzą kąt o mierze 76° (zobacz rysunek).



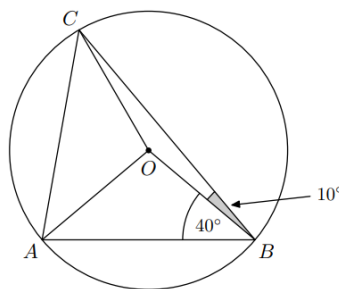
Znajdź miarę kąta OBA .

- 25.** Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek). Ponadto $\angle AOC = 130^\circ$ oraz $\angle BOA = 110^\circ$.



Znajdź miarę kąta BAC .

- 26.** Punkty A, B oraz C leżą na okręgu o środku w punkcie O . Kąt ABO ma miarę 40° , a kąt OBC ma miarę 10° (zobacz rysunek).



Znajdź miarę kąta ACO .

- 27.** Dane są dwa okręgi o promieniach 10 i 15. Mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego okręgu. Oblicz odległość między środkami tych okręgów.

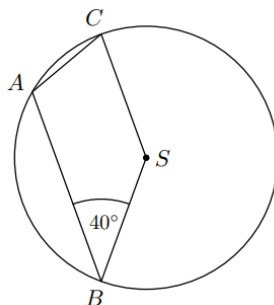
- 28.** Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

- 29.** Dane są dwa okręgi o promieniach 12 i 17. Mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego okręgu. Oblicz odległość między środkami tych okręgów.

- 30.** Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Oblicz długość boku tego kwadratu.

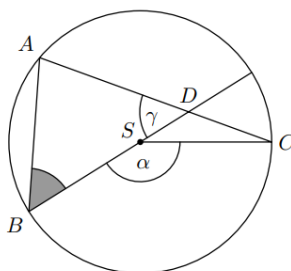
- 31.** Okrąg opisany na trójkącie równobocznym ma promień 12. Oblicz wysokość tego trójkąta.

- 32.** Wierzchołki A, B, C czworokąta $ABSC$ leżą na okręgu o środku S . Kąt ABS ma miarę 40° (zobacz rysunek), a przekątna BC jest dwusieczną tego kąta.



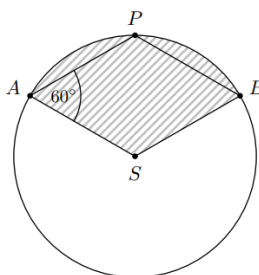
Znajdź miarę kąta ASC .

- 33.** Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku S . Punkt D jest punktem przecięcia cięciwy AC i średnicy okręgu poprowadzonej z punktu B . Miara kąta BSC jest równa α , a miara kąta ADB jest równa γ (zobacz rysunek).



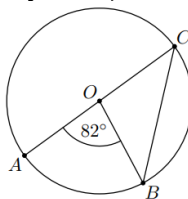
Znajdź miarę kąta ABD .

- 34.** Punkty A, B, P leżą na okręgu o środku S i promieniu 6. Czworokąt $ASBP$ jest rombem, w którym kąt ostry PAS ma miarę 60° (zobacz rysunek).



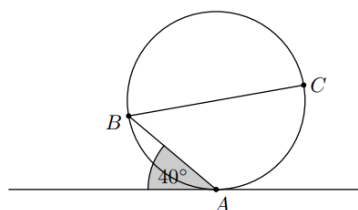
Oblicz pole zakreskowanej figury.

- 35.** Na okręgu o środku w punkcie O leżą punkty A, B oraz C . Odcinek AC jest średnicą tego okręgu, a kąt środkowy AOB ma miarę 82° (zobacz rysunek).



Znajdź miarę kąta OBC .

- 36.** Dane są okrąg i prosta styczna do tego okręgu w punkcie A . Punkty B i C są położone na okręgu tak, że BC jest jego średnicą. Cięciwa AB tworzy ze styczną kąt o mierze 40° (zobacz rysunek).

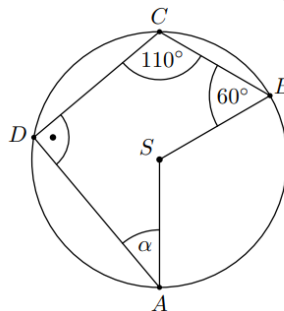


Znajdź miarę kąta ABC .

- 37.** Oblicz pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 4 cm.

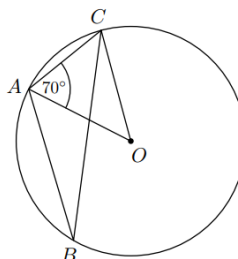
- 38.** W okrąg O o promieniu $9\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny T . Oblicz długość boku trójkąta T .

- 39.** Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku S . Miary kątów SBC, BCD, CDA są równe odpowiednio: $|SBC| = 60^\circ, |BCD| = 110^\circ, |CDA| = 90^\circ$ (zobacz rysunek).



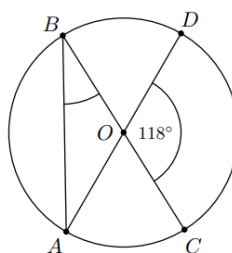
Znajdź miarę kąta DAS .

- 40.** Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O . Miara kąta CAO jest równa 70° (zobacz rysunek).



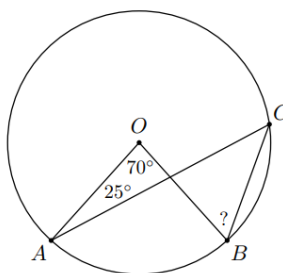
Znajdź miarę kąta ABC .

- 41.** Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o środku w punkcie O . Kąt środkowy DOC ma miarę 118° (zobacz rysunek).



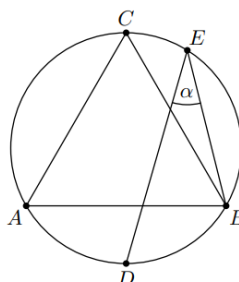
Znajdź miarę kąta ABC .

- 42.** Na okręgu o środku w punkcie O wybrano trzy punkty A, B, C tak, że $|ABO| = 70^\circ, |OAC| = 25^\circ$. Cięciwa AC przecina promień OB (zobacz rysunek).



Znajdź miarę kąta OBC .

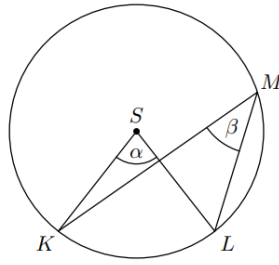
- 43.** Punkty D i E leżą na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC (zobacz rysunek). Odcinek CD jest średnicą tego okręgu.



Znajdź miarę kąta wpisanego DEB .

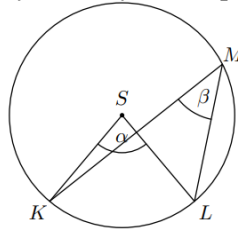
- 44.** Na trójkącie o bokach długości $\sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{15}$ opisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

- 45.** Dany jest okrąg o środku S . Punkty K, L i M leżą na tym okręgu. Na łuku KL tego okręgu są oparte kąty KSL i KML (zobacz rysunek), których miary α i β spełniają warunek $\alpha + \beta = 114^\circ$.



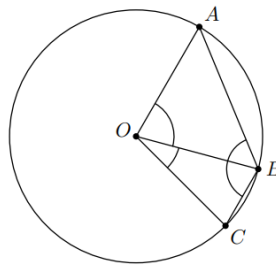
Znajdź miarę kąta β .

- 46.** Dany jest okrąg o środku S . Punkty K, L, M leżą na tym okręgu. Na łuku KL tego okręgu są oparte kąty KSL i KML (zobacz rysunek), których miary α i β spełniają warunek $\alpha + \beta = 111^\circ$.



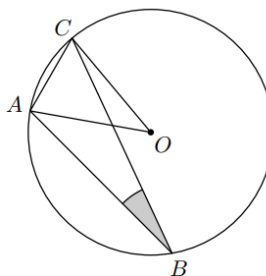
Znajdź miarę kąta α .

- 47.** Na okręgu o środku w punkcie O leżą punkty A, B i C (zobacz rysunek). Kąt ABC ma miarę 121° , a kąt BOC ma miarę 40° .



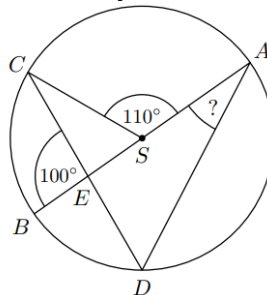
Znajdź miarę kąta AOB .

- 48.** W okręgu o środku O dany jest kąt wpisany ABC o mierze 20° (patrz rysunek).



Znajdź miarę kąta CAO .

- 49.** Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku S . Cięciwa CD przecina średnicę AB tego okręgu w punkcie E tak, że $|BEC| = 100^\circ$. Kąt środkowy ASC ma miarę 110° (zobacz rysunek).

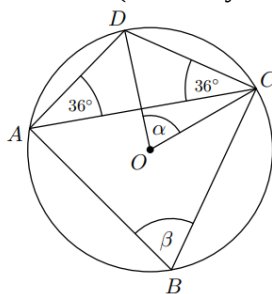


Znajdź miarę kąta BAD .

- 50.** Ostrokątny trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB jest wpisany w okrąg o środku S , przy czym kąt SAB ma miarę 40° . Oblicz miarę kąta CAB .

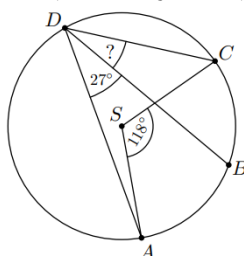
51. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB , taki że $\sin \angle BAC = 0,3$ i $|AC| = 7$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

52. Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek).



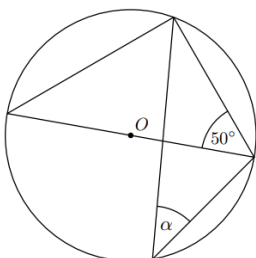
Wyznacz miary zaznaczonych kątów α i β .

53. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek).



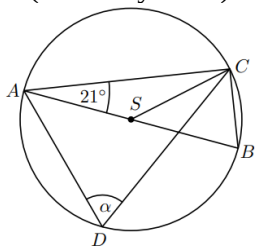
Wyznacz miarę kąta BDC .

54. W okręgu o środku O dany jest kąt o mierze 50° , zaznaczony na rysunku.



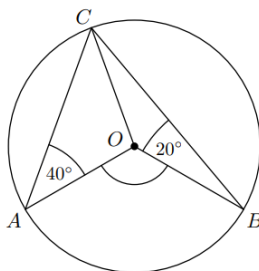
Wyznacz miarę kąta α .

55. Na okręgu o środku S leżą punkty A, B, C i D . Odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Kąt między tą średnicą a cięciwą AC jest równy 21° (zobacz rysunek).



Wyznacz miarę kąta α między cięciwami AD i CD .

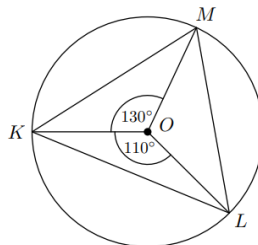
56. Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek).



Wyznacz zaznaczony na rysunku wypukły kąt środkowy AOB .

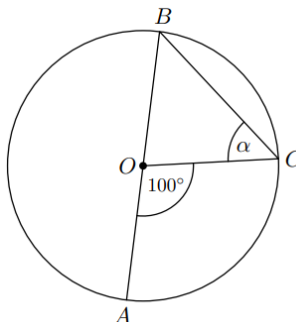
57.

58. Punkt O jest środkiem okręgu (zobacz rysunek).



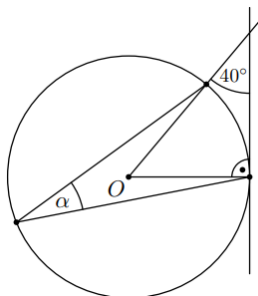
Wyznacz miarę kąta LKM .

- 59.** Punkt O jest środkiem okręgu o średnicy AB (tak jak na rysunku).



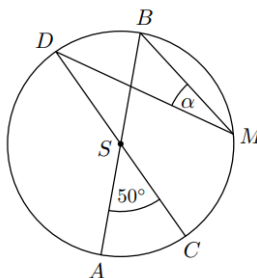
Wyznacz miarę kąta α .

- 60.** Punkt O jest środkiem okręgu.



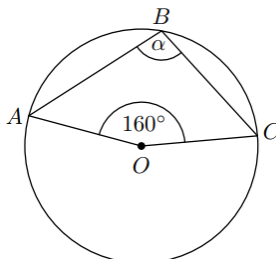
Wyznacz miarę kąta α zaznaczonego na rysunku.

- 61.** Średnice AB i CD okręgu o środku S przecinają się pod kątem 50° (tak jak na rysunku).



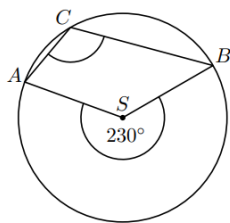
Wyznacz miarę kąta α .

- 62.** Punkt O jest środkiem okręgu.



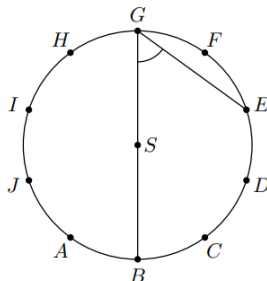
Wyznacz miarę kąta α .

- 63.** Punkty A , B i C leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek).



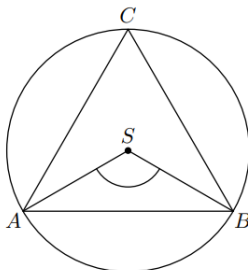
Wyznacz miarę zaznaczonego kąta wpisanego ACB .

- 64.** Punkty $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ dzielą okrąg o środku S na dziesięć równych łuków.



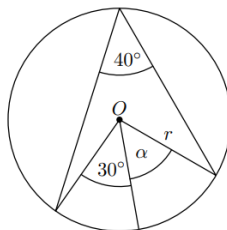
Oblicz miarę kąta wpisanego BGE zaznaczonego na rysunku.

- 65.** Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

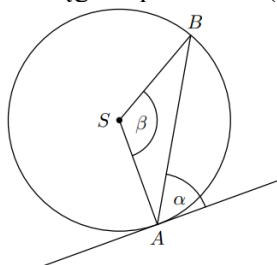


Wyznacz miarę zaznaczonego na rysunku kąta środkowego ASB .

- 66.** Wyznacz miarę zaznaczonego na rysunku kąt α

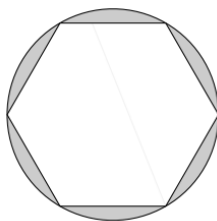


- 67.** Kąt między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie A (zobacz rysunek) ma miarę $\alpha = 62^\circ$.



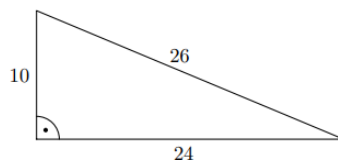
Wyznacz miarę kąta β .

- 68.** Sześciokąt foremny wpisano w koło o promieniu 1 (zobacz rysunek).



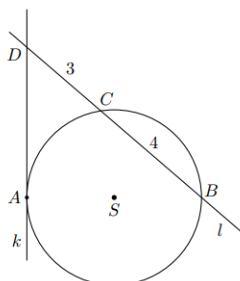
Oblicz pole zacieniowanej figury.

- 69.** Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości 10, 24, 26 (zobacz rysunek).



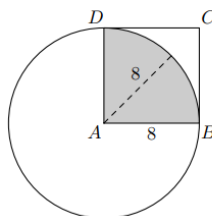
- a) Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- b) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

- 70.** Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku S . Prosta k jest styczna do tego okręgu w punkcie A . Prosta l przecina ten okrąg w punktach B i C . Proste k i l przecinają się w punkcie D , przy czym $|BC| = 4$ i $|CD| = 3$ (zobacz rysunek)



Oblicz odległość punktu A od prostej l .

- 71.** Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 8. Z wierzchołka A zakreślono koło o promieniu równym długości boku kwadratu (zobacz rysunek).



Oblicz pole powierzchni części wspólnej koła i kwadratu.

- 72.** Pole figury F_1 złożonej z dwóch stycznych zewnętrznie kół o promieniach 1 i 3 jest równe polu figury F_2 złożonej z dwóch stycznych zewnętrznie kół o promieniach długości r (zobacz rysunek).

Figura F_1

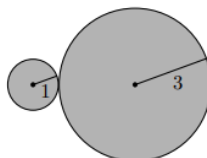
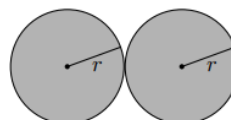
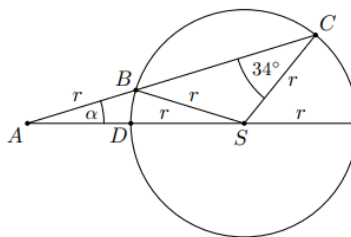


Figura F_2



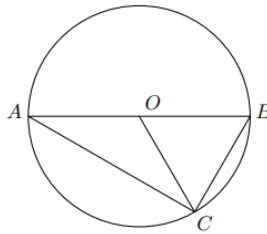
Oblicz długość r promienia.

- 73.** Punkty B, C i D leżą na okręgu o środku S i promieniu r . Punkt A jest punktem wspólnym prostych BC i SD , a odcinki AB i SC są równej długości. Miara kąta BCS jest równa 34° (zobacz rysunek).



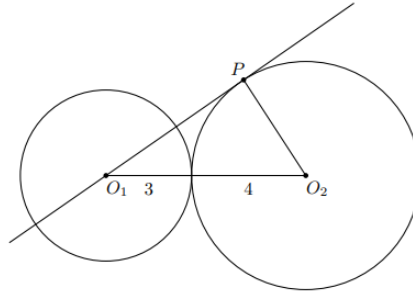
Oblicz miarę kąta α .

- 74.** Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku O i promieniu r . Na tym okręgu wybrano punkt C , taki, że $|OB| = |BC|$ (zobacz rysunek).



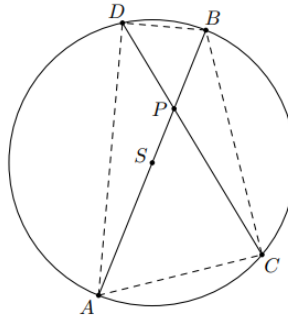
Oblicz pole trójkąta AOC .

75. Okręgi o promieniach 3 i 4 są styczne zewnętrznie. Prosta styczna do okręgu o promieniu 4 w punkcie P przechodzi przez środek okręgu o promieniu 3 (zobacz rysunek).



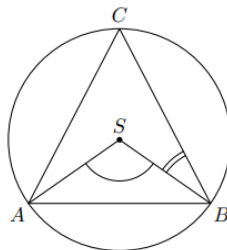
Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki okręgów i punkt styczności P .

76. Dany jest okrąg O o środku w punkcie S . Średnica AB tego okręgu przecina cięciwę CD w punkcie P (zobacz rysunek). Ponadto: $|PB| = 4$, $|PC| = 8$ oraz $|PD| = 5$.



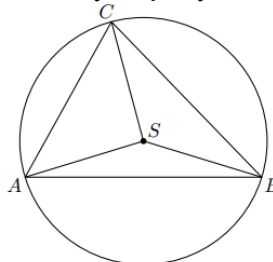
Oblicz promień okręgu O .

77. Środek S okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC , o ramionach AC i BC , leży wewnątrz tego trójkąta (zobacz rysunek)

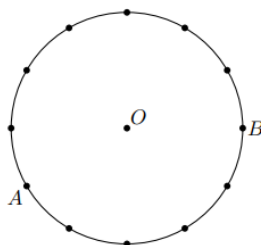


Wykaż, że miara kąta wypukłego ASB jest cztery razy większa od miary kąta wypukłego SBC .

78. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC . Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS , a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS . Oblicz kąt trójkąta ABC .



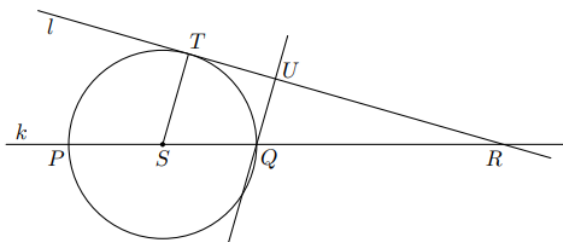
79. Punkty A i B leżą na okręgu o środku O i dzielą ten okrąg na dwa łuki, których stosunek długości jest równy 7:5. Oblicz miarę kąta środkowego opartego na krótszym łuku.



80. Dane są:

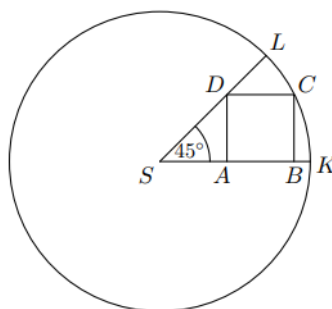
- okrąg o środku S i promieniu $r = 1$,
- prosta k przechodząca przez S i przecinająca okrąg w punktach P i Q ,
- prosta l styczna do danego okręgu w punkcie T .

Prosta k przecina prostą l w punkcie R . Prosta przechodząca przez punkt Q i równoległa do odcinka ST przecina styczną l w punkcie U (zobacz rysunek).



Oblicz długość odcinka TU wiedząc, że spełniony jest warunek $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2}{3}$.

81. W wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy KSL o mierze 45° wpisano kwadrat $ABCD$ w taki sposób, że wierzchołki A oraz B leżą na promieniu SK , wierzchołek D leży na promieniu SL , a wierzchołek C leży na łuku KL (zobacz rysunek).



Oblicz stosunek pola kwadratu $ABCD$ do pola wycinka kołowego KSL .

82.

83.

84.

85.

86.

87.

88.

89.

90.

91.

92.