

4. Wyrażenia algebraiczne. Wzory skróconego mnożenia.

Zadania:

1. Zapisz wyrażenie w najprostszej postaci:
a) $(3x + y)^2 - (3x - y)^2 =$
b) $(3x + 2)^2 - (2x - 3)^2 =$
c) $\frac{2x^2}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x}$, dla $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$
d) $(2a + b)^2 - (2a - b)^2 =$
e) $(2a - 3)^2 - (2a + 3)^2 =$
f) $(3 + 4a)^2 - (3 - 4a)^2 =$
g) $5 - (4 + 2a)(4 - 2a) =$
h) $(x - 1)^2 - (2 - x)^2 =$
i) $(3x - 2)^2 - (2x - 3)(2x + 3) =$
j) $(3x + 1 + y)^2 =$
k) $16 - (3x + 1)^2 =$
l) $4x - 5y + 6xy - (2xy + x - y) =$
m) $-6,5x \cdot (10x^2 - 20x + 30) =$
n) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{8} + 4\sqrt{2}) =$
o) $(x\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + x) =$
p) $(x + 7y)^2 =$
q) $\left(\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y\right)^2 =$
r) $(1 + 0,3x)(1 - 0,3x) =$
s) $(3 + x)^2 + (4 - x)^2 =$
t) $(2x - 5)^2 - (5x - 2)^2 =$
u) $(x + y)(x - y)(2xy - (x + 2)^2) =$
2. Oblicz:
a) $(2\sqrt{10} + \sqrt{2})^2 =$
b) $(2 - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} - 2)^2 =$
c) $(1 + \sqrt{5})^2 - (1 - \sqrt{5})^2 =$
d) $(5 - 2\sqrt{3})^2 =$
e) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{3} =$
f) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})^2 =$
g) $(8 - 3\sqrt{7})^2 =$
h) $(2\sqrt{7} - 5)^2 \cdot (2\sqrt{7} + 5)^2 =$
i) $50001^2 - 49999^2 =$
j) $(5 + 2\sqrt{3})^2 =$
k) $(\sqrt{18} - \sqrt{2})^2 =$
l) $\left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}\right)^2 =$
m) $(6\sqrt{6} - 3\sqrt{3})^2 =$
n) $(5\sqrt{2} - \sqrt{5})(5\sqrt{2} + \sqrt{5}) =$
3. Usuń niewymierność z mianownika:
a) $\frac{2}{\sqrt{3}} =$
b) $\frac{2}{2-\sqrt{3}} =$
c) $\frac{7}{\sqrt{2}+3} =$
d) $\frac{8}{\sqrt{3}-3} =$

e) $\frac{12}{\sqrt{5}+3} =$
f) $\frac{4}{\sqrt{6}-1} =$
g) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+5} =$
h) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} =$
i) $\frac{8-\sqrt{8}}{8+\sqrt{8}} =$
j) $\frac{\sqrt{48-2\sqrt{75}+\sqrt{27}}}{2\sqrt{300-2\sqrt{243}}} =$
k) $\frac{3\sqrt{24}+\sqrt{150+5\sqrt{216}}}{12\sqrt{6}+9\sqrt{54}-4\sqrt{96}} =$
l) $\frac{\sqrt{28-5\sqrt{63}-4\sqrt{175}}}{6\sqrt{7}+3\sqrt{112}-5\sqrt{700}} =$
m) $\frac{\sqrt{12+2\sqrt{27}+4\sqrt{75}}}{3\sqrt{48}+6\sqrt{3}} =$
4. Oblicz wartość wyrażenia dla danej zmiennej:
a) $x^2 + 10x + 25$ dla $x = \sqrt{2} - 5$
b) $x^2 - 6x + 9$ dla $x = \sqrt{3} + 3$
c) $x^2 - 2xy + y^2$ dla $x = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1, y = \sqrt{2} - 1$
d) $x^y - y^x$ dla $x = -2, y = 3$
e) $(x - y)^2$ dla $x = 2\sqrt{3}, y = \sqrt{75}$
f) $\frac{x \cdot y}{x+y}$ dla $x = \frac{3}{2}, y = 2$
g) $(\sqrt{2} - x)^2 - (2x^3 + 1)(2x^3 - 1)$ dla $x = \sqrt{2}$
h) $(x + 2)^2 - (3x + 2)(2 - 3x) - (\sqrt{3} + x)^2$ dla $x = \sqrt{3}$
i) $(x - 3)^2 + \sqrt{5}(2x + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2x) - (1 - x)^2$ dla $x = -\sqrt{5}$
j) $x^2 - 4y^2$ dla $x = 2\sqrt{3} - 1$ i $y = \sqrt{3} - 1$
k) $(x + 3y)^2 - (x + 3y)(3y - x) - (x - 3y)^2 - y(6x - 9y)$ dla $x = -\sqrt{2}$ i $y = \frac{1}{3}$
5. Wykaż, że:
a) dla $n \in \mathbb{N}$ liczba $7n^2 + 21n$ jest podzielna przez 14.
b) $2501^4 - 2499^4$ jest podzielna przez 10000.
c) $8^{50} - 2^{145}$ jest podzielna przez 31.
d) dla $a \in \mathbb{Z}$, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1 i dla $b \in \mathbb{Z}$, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4, liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 5.
e) dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $3n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez 4.
f) dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $(2n + 5)^2 + 3$ jest podzielna przez 4.
g) dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $5n^3 - 5n$ jest podzielna przez 30.
h) dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.
i) dla każdej nieparzystej liczby całkowitej n liczba $3n^2 + 4n + 1$ jest podzielna przez 4.
j) dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $3n^3 + 18n^2 - 15n$ jest podzielna przez 6.
k) dla każdej liczby całkowitej k reszta z dzielenia liczby $49k^2 + 7k - 2$ przez 7 jest równa 5.
l) dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $(2n + 1)^2 - 1$ jest podzielna przez 8.
m) dla każdej nieparzystej liczby całkowitej n liczba $n^2 + 2023$ jest podzielna przez 8.
n) dla każdej liczby naturalnej n liczba $5n^2 + 15n$ jest podzielna przez 10.
o) dla każdej liczby naturalnej n liczba $10n^2 + 30n + 8$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.
p) reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 8 daje resztę 6.
q) jeżeli liczba całkowita nie dzieli się przez 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.
r) suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 24.
s) każda liczba całkowita k , która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2 ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

t)	liczba $(1 + 2013^2)(1 + 2013^4)$ jest dzielnikiem liczby $1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7$.
u)	dla każdej liczby całkowitej n liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.
v)	dla każdej liczby naturalnej n liczba $20n^2 + 30n + 7$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.
w)	suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.
x)	jeśli $a + b = 1$, $a^2 + b^2 = 7$ to $a^4 + b^4 = 31$.
y)	jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.
z)	jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2}$, to $a = b$ lub $a + b = 1$.
aa)	jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.
bb)	jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi to $x^2 + y^2 \geq 2xy$
cc)	jeśli x, y, z są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x + y + z = 1$ to $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$
dd)	jeśli od liczby trzycyfrowej niepodzielnej przez 10 odejmiemy liczbę zapisaną tymi samymi cyframi, to otrzymana różnica będzie podzielna przez 9.
ee)	jeśli dla liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi równość $(a + b)^2 + (c - d)^2 = (a + c)^2 + (b - d)^2$ to $b = c$ lub $a = -d$.
ff)	jeśli liczba n przy dzieleniu przez 8 daje resztę 5, to liczba o 1 mniejsza od kwadratu liczby n jest podzielna przez 8.
gg)	dla dowolnej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $2n^2 + 4n + 10$ jest podzielna przez 8
hh)	jeśli liczba $2n + 13m$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi jest podzielne przez 17 to liczba $8n + k$ jest podzielna przez 17
6. Udowodnij, że:	
a)	dla każdej liczby rzeczywistej a różnej od 0 i każdej liczby rzeczywistej b różnej od 0 spełniona jest nierówność $2a^2 - 4ab + 5b^2 > 0$
b)	dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej y takich, że $x \neq y$ prawdziwa jest nierówność $\left(\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y\right)^2 < \frac{x^2 + 4y^2}{5}$
c)	dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq a$, spełniona jest nierówność $\frac{a^2 + b^2}{2} > \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$
d)	dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b i c takich, że $\frac{a+b}{2} > c$ i $\frac{b+c}{2} > a$, prawdziwa jest nierówność $\frac{a + c}{2} < b$
e)	dla każdych trzech dodatnich liczb a, b i c takich, że $a < b$, spełniona jest nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + c}$
f)	dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $a(a + b) + b^2 > 3ab$
g)	jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek $a < 4$ i $b < 4$, to $ab + 16 > 4a + 4b$.
h)	dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $a(a - 2b) + 2b^2 > 0$
i)	dla każdej liczby dodatniej x prawdziwa jest nierówność $x + \frac{1-x}{x} \geq 1$
j)	dla każdej liczby $a > 0$ i dla każdej liczby $b > 0$ prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$
k)	dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$
l)	że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

m) dla dowolnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geq \frac{2}{a+b}$
n) dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $4x + \frac{1}{x} \geq 4$
o) prawdziwa jest nierówność $(1,5)^{100} < 6^{25}$.
p) jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$, to $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = ab + bc + ac$
q) dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2(x^3 + y^3)$
r) dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$
s) dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $3x^2 + 5y^2 - 4xy \geq 0$
t) dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$
u) dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest nierówność $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$
v) dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x + y + z = 0$, prawdziwa jest nierówność $xy + yz + xz \leq 0$ Możesz skorzystać z tożsamości $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
w) prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50} + 1} + \sqrt{2^{50} - 1} < 2^{26}$
x) dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 6y + 13 > 0$
y) suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą
z) suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych nie jest liczbą podzielną przez 4
aa) liczba $(\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 + 4\sqrt{3}$ jest liczbą naturalną
bb) liczba $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ jest liczbą wymierną
cc) a jest liczbą całkowitą, jeśli $a = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}}$ Usuń niewymierności z mianowników.
7. Dla $2x = 3y$, $x, y > 0$. Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{x^2 + y^2}{x \cdot y}$.
8. Dla $a + b = 8$ i $a^2 - b^2 = 200$, wyznacz $a - b$.
9. Ile jest równa najmniejsza wartość wyrażenia $(x + y)(x - y)$ dla $x, y \in \{2, 3, 4\}$?
10. Ile jest równy iloczyn sum algebraicznych: $3x^3 - 2x$ oraz $-3x^2 - 2$.
11. Dane są dwie liczby x i y , takie że $\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Oblicz wartość $\frac{x + y}{x}$. Wynik podaj bez niewymierności w mianowniku.
12. Dane są liczby $a = \sqrt{5} - 2$ oraz $b = \sqrt{5} + 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ dla podanych a i b .
13. Liczbę $a = (\sqrt{2} + \sqrt{7})^2$ można zapisać w postaci $a = x + y\sqrt{14}$, gdzie $x \in \mathbb{Z}$ oraz $y \in \mathbb{Z}$. Uzupełnij poniższe równości. Wpisz właściwe liczby w wykropkowanych miejscach. $x = \dots\dots\dots \quad y = \dots\dots\dots$

14. Okres T drgań wahadła w pewnym zegarze dany jest wzorem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdzie l oznacza długość wahadła, a g oznacza przyspieszenie grawitacyjne. Przyjmij do obliczeń, że przyspieszenie grawitacyjne na Ziemi wynosi $g_Z = 9,81 \text{ m/s}^2$, a przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu wynosi $g_K = 1,62 \text{ m/s}^2$.

Oblicz $\frac{T_K}{T_Z}$ – stosunek okresu drgań tego wahadła, gdyby znajdowało się ono na Księżycu, do okresu Drgań tego samego wahadła znajdującego się na Ziemi. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

15. Dane jest wyrażenie:

$$\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right) : \frac{a-b}{a^2-b^2}$$

Gdzie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $a \neq -b$. Przekształć dane wyrażenie do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

16. Równoległobok o bokach długości $x^2 + 3$ i $x^2 + 2x + 5$ oraz romb mają równe obwody. Podaj wyrażenie opisujące długość boku tego rombu.